

Física

¿De qué manera varía la energía mecánica de acuerdo a la cantidad de ciclos de un péndulo amortiguado?

Marzo 2022

Introducción

El descubrimiento del funcionamiento del péndulo se puede atribuir a Galileo Galilei, quien se dice que en siglo XVI realizó observaciones del movimiento oscilatorio de un candelabro, y concluyó que a pesar de que la amplitud del desplazamiento se reducía, el tiempo que cada oscilación duraba era aproximadamente el mismo, describiendo así el movimiento del péndulo, de acuerdo a Baker y Blackburn (2005). De igual manera, Galileo propuso usar el péndulo para medir el pulso cardíaco de las personas y también como reloj, el cual fue más tarde aplicado para calcular rutas de navegación de barcos, según Pérez (s.f). Además, después de las observaciones de la moción del péndulo, años más tarde se construiría el péndulo de Foucault para demostrar la rotación de la tierra a mediados del siglo XVII. Incluso, con base en Matthews (2004), el mismo Galileo argumentó que uno de los fundamentos del movimiento del péndulo le permitió medir el tiempo de caída libre. Por lo tanto, entender estos fundamentos es relevante para distintas áreas de física, pues este conocimiento incluso fue empleado en la mecánica cuántica y física molecular.

En lo personal, me ha llamado la atención la manera en que se establecen modelos “ideales” para describir fenómenos físicos, como sucede por ejemplo con un gas ideal. Sin embargo, en la vida real, las condiciones son raramente perfectas, por lo que es necesario acudir a la experimentación para probar teorías o hipótesis. Teniendo esto en consideración, decidí enfocar este trabajo en el péndulo, ya que me interesaba medir *la energía mecánica* en un péndulo no idóneo, un péndulo amortiguado que es afectado por factores como la gravedad o resistencia del aire, lo cual se puede ver mientras más oscilaciones realiza la masa. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es obtener la relación entre la energía mecánica y el número de ciclos de un péndulo amortiguado, lo cual se logrará a través de un experimento donde se construya un péndulo y con un sensor se mida la fuerza del impacto de la masa en diferentes ocasiones, dejando que la masa oscile cada vez por un mayor número de ciclos.

Marco Teórico

I. El péndulo

Un péndulo está formado por un cuerpo pesado suspendido por medio de un hilo en un punto sobre un eje horizontal, el cual oscila y realiza movimientos cuasi-periódicos, de acuerdo a Pérez (1997) y Gómez (2017).

De igual manera, según Matthews (2004), Galileo estableció las siguientes leyes de todo péndulo:

- El periodo varía con la longitud del hilo
- El periodo es independiente de la amplitud
- El periodo es independiente del peso
- Para cada longitud, todos los periodos son los mismos

II. Péndulo simple

Es el modelo ideal de un péndulo, el cual está constituido por una masa suspendida de un hilo (inextensible y sin masa), la cual “se desplaza en un ángulo θ respecto de la vertical y se deja oscilar (sin imprimirle velocidad inicial) movida únicamente por la acción de la gravedad y la restricción que le impone el hilo”. (Gómez, 2017, p.1)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

T = periodo del péndulo (s)

L = longitud del péndulo (m)

g = gravedad (9.81ms^{-2})

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

θ = ángulo formado por la cuerda y el centro del péndulo

ω = frecuencia angular

ϕ = constante de fase

t = tiempo (s)

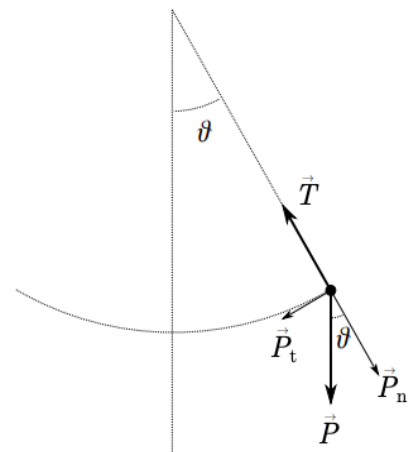


Imagen de Gómez, V. (2017)

Un péndulo simple es un ejemplo de un MAS (movimiento armónico simple).

III. Movimiento armónico simple

“Un movimiento armónico simple es un movimiento periódico, es decir que se repite a intervalos iguales de tiempo. Puede ser descrito en función del movimiento circular uniforme.” (Pérez, 1997, p.116) Además, un MAS siempre debe cumplir con dos condiciones:

La aceleración es proporcional a la posición $a_x \propto x$ (3)

La aceleración es opuesta a la dirección del desplazamiento $a_x = -\frac{k}{m}x$ (4)

a_x = aceleración en x (ms^{-2})

k = constante de proporcionalidad

x = posición (m)

m = masa (kg)

IV. Movimiento amortiguado

Según Castaños (2016), un movimiento amortiguado es aquel que mantiene una disminución progresiva de la amplitud de la oscilación hasta reducirse por completo, es decir es mantiene una pérdida de energía a causa de fuerzas disipativas que producen la amortiguación.

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad (5)$$

A = Amplitud

t = tiempo (s)

ϕ = constante de fase

b = constante de amortiguamiento

ω = frecuencia angular

m = masa (kg)

V. Impulso

“El impulso mecánico que recibe un cuerpo es igual al producto de la fuerza aplicada por el intervalo de tiempo en el cual ésta actúa” (Pérez, 1997, p.207). Sin embargo, el impulso también puede definirse como el cambio del momento:

$$I = F_{prom} \Delta t = \Delta P \quad (6)$$

$$\Delta P = P_f - P_i \quad (7)$$

F_{prom} = Fuerza promedio (N)

P = momento (kgms^{-1})

Δt = cambio del tiempo

P = masa \times velocidad

VI. Energía

Energía Mecánica

“La energía mecánica es la que poseen los cuerpos cuando por su velocidad o posición son capaces de realizar un trabajo. Se divide en energía cinética y potencial”. (Pérez, 1997, p.198).

$$E_M = E_P + E_K \quad (8)$$

E_P = Energía potencial (J)

E_K = Energía cinética (J)

Energía Potencial

Con base en Pérez (1997), esta energía es la que posee todo cuerpo cuando es capaz de realizar trabajo en función de su altura.

$$E_P = mgh \quad (9)$$

m = masa (kg)

h = altura (m)

Energía Cinética

“Es la que posee cualquier cuerpo que se encuentre en movimiento” (p.198)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (10)$$

$$E_K = \frac{(\Delta P)^2}{2m} \quad (11)$$

v = velocidad (ms^{-1})

Diseño de investigación

I. Pregunta de Investigación

¿De qué manera varía la energía mecánica de acuerdo a la cantidad de ciclos de un péndulo amortiguado?

II. Hipótesis

Hipótesis (H_1): Si la cantidad de ciclos de oscilación en un péndulo amortiguado incrementa, entonces su energía mecánica será reducida.

Hipótesis nula (H_0): Si la cantidad de ciclos de oscilación en un péndulo amortiguado incrementa, entonces su energía mecánica aumentará.

Hipótesis alternativa (H_A): Si la cantidad de ciclos de oscilación en un péndulo amortiguado incrementa, entonces su energía mecánica no sufrirá ningún efecto.

III. Variables

La **variable dependiente** será la energía mecánica de la pelota al impactar con el sensor de fuerza.

La **variable independiente** será el número de ciclos que la pelota oscila antes de impactar con el sensor.

Las **variables de control** serán principalmente la longitud de la cuerda, la masa que oscila, la posición inicial (ángulo y altura de la posición inicial de la masa en el péndulo) y el punto de impacto.

Metodología

Para contestar a la pregunta de investigación, se llevó a cabo un experimento, por lo que fue necesario construir una base para el sensor de fuerza marca PASport con un error de lectura de $\pm 0.001\text{N}$, el cual debía deslizarse sobre la mesa. Para esto, se usó una madera de $0.330 \times 0.130 \times 0.018 \pm 0.001\text{m}$, a la cual se fijaron 3 brackets para sujetar el sensor, como mostrado en la figura 1. Con el sensor en su lugar, se construyó un péndulo usando uno de los soportes universales, al cual se le amarró una cuerda en la varilla horizontal. Después se midió la altura a la cual se debería amarrar la pelota de $0.011 \pm 0.001\text{kg}$ de masa, lo cual fue medido con una báscula marca IBN de modelo B-5P, para que en la posición neutral del péndulo, la pelota impactara con el sensor de fuerza fijado a la madera, lo cual resultó con una cuerda de $0.540 \pm 0.001\text{m}$ de largo desde la pelota hasta la varilla del soporte. Las mediciones de distancia fueron hechas con un flexómetro marca Protul con un error de lectura de $\pm 0.001\text{m}$.



Figura 1: preparación para el movimiento del sensor

De igual manera, para medir la fuerza después varias oscilaciones de la pelota, se necesitaba que el sensor pudiera moverse al mismo punto rápidamente, por lo que se fijó otra madera de $0.725 \times 0.130 \times 0.018 \pm 0.001\text{m}$ a la mesa usando un *clamp*, como en la figura 1. Así mismo, para evitar que el soporte universal se moviera y mantener mayor seguridad, este también fue fijado a la mesa, ya que a su vez sería el límite al cual se

desplazaría el sensor, por lo que incluso se colocó un borrador de goma para evitar dañar la base del soporte.

Finalmente, para reducir el error aleatorio y que la pelota fuera lanzada desde la misma altura y con el mismo ángulo respecto a la barra del péndulo, se utilizó el segundo soporte universal, el cual fué colocado a $0.410 \pm 0.001\text{m}$ del otro (tomando como referencia las barras metálicas de los soportes). Luego, se colocó una pinza en el segundo soporte universal y se ajustó su altura de manera que se pudiera sujetar la pelota con la cuerda lo suficientemente tensa, como mostrado en la figura 2.

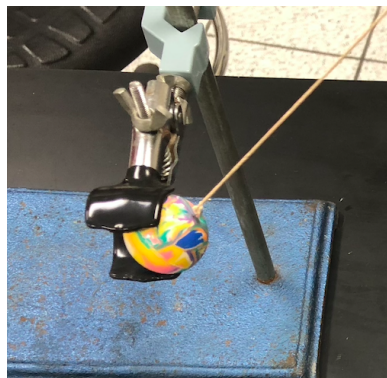


Figura 2: Pinza sujetando masa del péndulo

Con la preparación lista, se conectó el sensor de fuerza a una tableta a través de bluetooth y se utilizó la aplicación SPARKvue para realizar las mediciones. Para cada número de oscilaciones diferente, se inició una gráfica con la aplicación y se soltó la pelota con la pinza. Luego se dejó oscilar el número de ciclos necesarios y se insertó el sensor para medir la fuerza en el impacto. Esto se repitió 6 veces para cada número de ciclos, obteniendo una gráfica como el ejemplo de la de la figura 3. En total se probaron 8 diferentes números de ciclos.

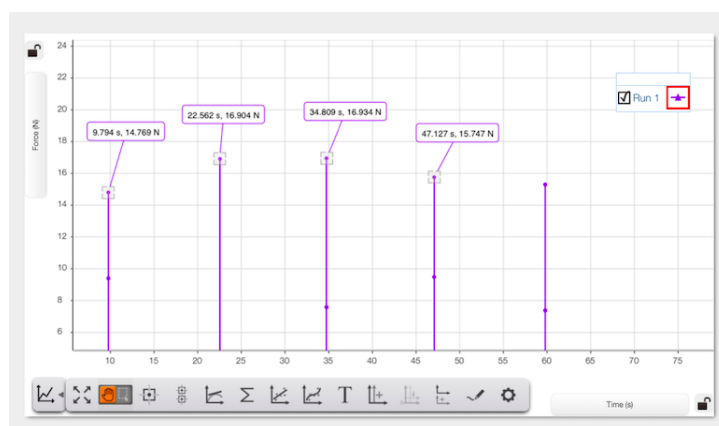


Figura 3: Gráfica generada por la aplicación SPARKvue.

En las primeras mediciones, el punto donde se introdujo el sensor era a $\frac{1}{4}$ del periodo de oscilación, en el punto de equilibrio, y para cada siguiente intento se agregaba un ciclo más, como puede verse en la siguiente tabla:

Número de ciclos	1/4	1 1/4	2 1/4	3 1/4	4 1/4	5 1/4	6 1/4	7 1/4
Medición	Fuerza F \pm 0.001N							
x_1	17.611	14.413	16.34	15.599	17.23	16.756	14.769	16.074
x_2	15.602	16.785	15.658	15.116	13.879	13.96	16.934	15.747
x_3	15.898	17.082	17.023	17.357	13.612	16.319	15.747	15.925
x_4	18.246	14.824	16.904	17.497	16.489	13.993	15.688	12.544
x_5	18.002	14.947	16.281	18.076	15.688	16.845	15.214	14.68
x_6	16.100	15.154	14.561	15.095	16.281	17.056	14.709	13.434
Promedio	16.910	15.534	16.128	16.457	15.530	15.822	15.510	14.734
Error aleatorio	± 1	± 1	± 0.9	± 1	± 1	± 1	± 0.8	± 1

Tabla 1: Resultados de la fuerza obtenida dependiendo del número de ciclos.

De estas gráficas, se calculó el error aleatorio usando las siguientes fórmulas:

$$e = \sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_N)^2}{N-1}} \quad (12)$$

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (13)$$

El siguiente es un ejemplo del cálculo del error aleatorio:

$$e = \sqrt{\frac{(17.611-16.910)^2 + (15.602-16.910)^2 + (15.898-16.910)^2 + (18.246-16.910)^2 + (18.002-16.910)^2 + (16.100-16.910)^2}{6-1}}$$

$$e \approx 1.171... = \pm 1$$

De igual manera, en base a las gráficas obtenidas, en cada impacto se midió el cambio del tiempo como puede ser visto en la figura 4:

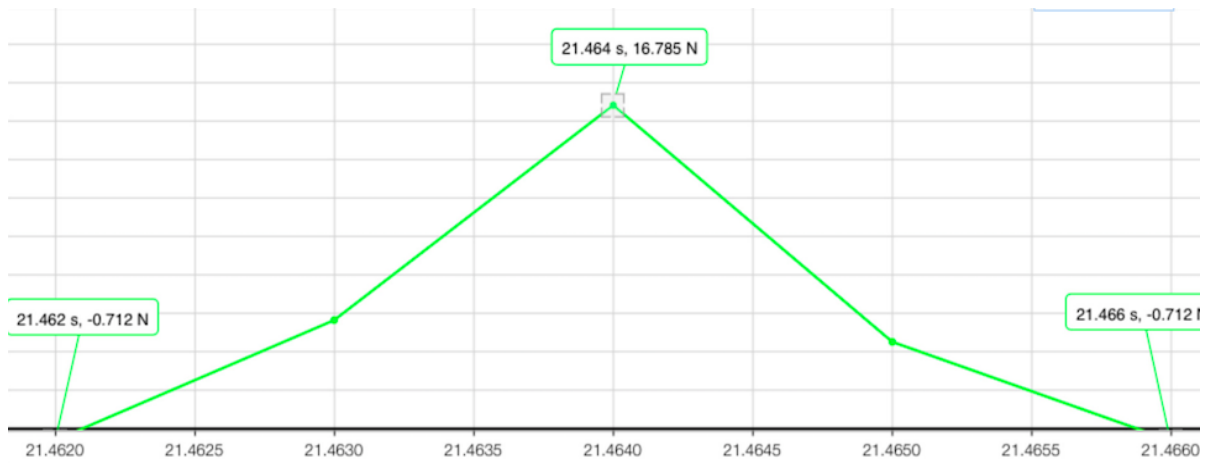


Figura 4: Ejemplo de uno de los impactos medidos para obtener el tiempo.

En este caso, el tiempo se calcularía con la siguiente fórmula:

$$\Delta t = t_f - t_i \quad (14)$$

$$\Delta t = (21.4660 \pm 0.0002s) - (21.4620 \pm 0.0002s) = 0.0040 \pm 0.0004s$$

Después de medir el tiempo en varias ocasiones, se descubrió que el tiempo de impacto era el mismo en todos los intentos, por lo que este valor será utilizado en todos los cálculos del impulso.

Análisis de datos

I. Impulso

Para el impulso, se tomó en cuenta el promedio de la fuerza como $\frac{1}{2}$ de los valores obtenidos. Sin embargo, era necesario usar los valores promedios obtenidos en la tabla 1 con su error aleatorio:

$$F_{prom} = \frac{17 \pm 1N}{2} = 8.5 \pm 1N.$$

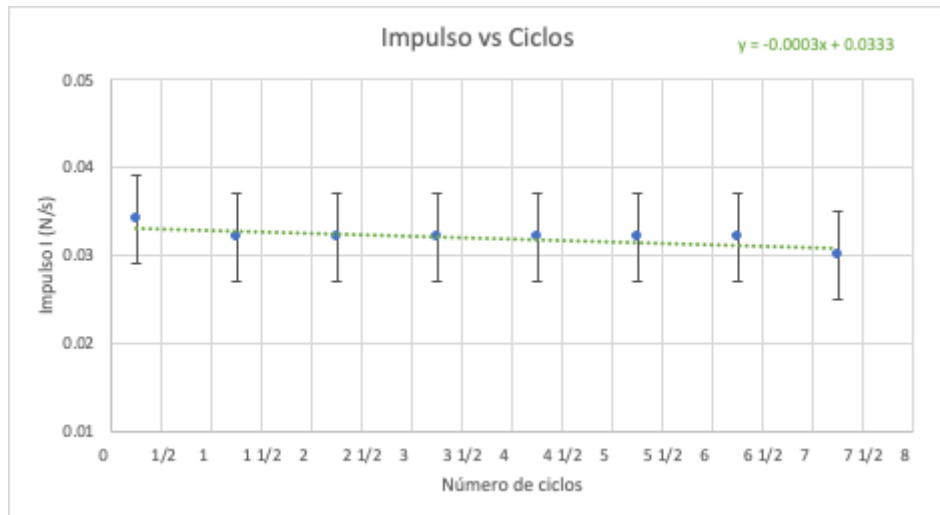
De igual manera, tomando el valor del cambio del tiempo Δt y la fórmula 6, el impulso sería el siguiente:

$$I = F_{prom} \Delta t = \frac{1}{2} (17 \pm 1N) (0.0040 \pm 0.0004s)$$
$$I = 0.034 \pm (0.034) \left(\frac{1}{17} + \frac{0.0004}{0.0040} \right) Ns^{-1}$$
$$I = 0.034 \pm 0.005 Ns^{-1}$$

Este cálculo se repitió para cada número de ciclos, obteniendo los siguientes resultados:

Número de ciclos	Fuerza F (N)	Impulso I (Ns ⁻¹)
1/4	17 ± 1	0.034 ± 0.005
1 1/4	16 ± 1	0.032 ± 0.005
2 1/4	16.1 ± 0.9	0.032 ± 0.005
3 1/4	16 ± 1	0.032 ± 0.005
4 1/4	16 ± 1	0.032 ± 0.005
5 1/4	16 ± 1	0.032 ± 0.005
6 1/4	15.5 ± 0.8	0.032 ± 0.005
7 1/4	15 ± 1	0.030 ± 0.005

Tabla 2: Se muestra la fuerza y el impulso en base al número de ciclos de ciclos con sus errores aleatorios.



Gráfica 1: impulso contra ciclos con las barras de error y ecuación de la línea de tendencia.

II. Energía mecánica

De acuerdo a la fórmula 8, fue necesario calcular la energía potencial y la cinética, ya que en este caso, al estar la pelota en movimiento en el punto de equilibrio del péndulo, sí había energía cinética y al estar elevada sobre el suelo (mesa), también tenía energía potencial.

Energía potencial

Para la energía potencial, se usó la masa de la pelota y la altura desde la mesa hasta la pelota en el punto más bajo donde impactaba con el sensor, esta siendo $0.030 \pm 0.001m$.

$$E_p = mgh = (0.011 \pm 0.001kg)(9.81ms^{-2})(0.030 \pm 0.001m)$$

$$E_p = (9.81ms^{-2})((0.011kg)(0.030m) \pm ((0.011)(0.030)(\frac{0.001}{0.011} + \frac{0.001}{0.030})))$$

$$E_p = 0.00324 \pm 0.00004J$$

Energía cinética

Para calcular la energía cinética, se usó la fórmula 11, debido a que previamente se había calculado el impulso, de donde se podía obtener el cambio del momento, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$E_K = \frac{(\Delta P)^2}{2m} = \frac{(0.034 \pm 0.005)^2}{2(0.011 \pm 0.001kg)} = 0.0525 \pm (0.0525)(2(\frac{0.005}{0.034}) + \frac{0.001}{0.011})J$$

$$E_K = 0.05 \pm 0.02J$$

Energía mecánica

Finalmente, se sumaron ambas energías para obtener la energía mecánica, como en la siguiente demostración:

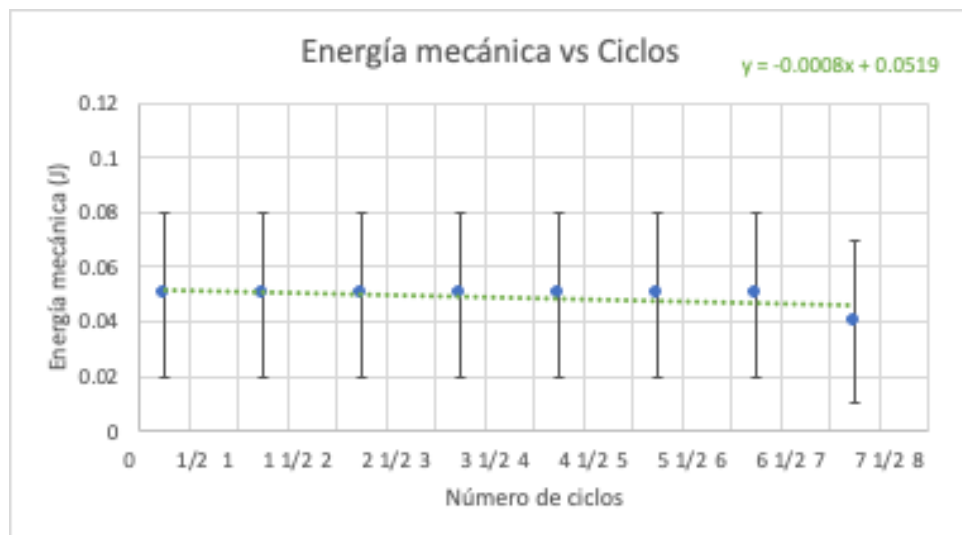
$$E_M = (0.00324 \pm 0.00004)J + (0.05 \pm 0.02)J = 0.05324 \pm 0.02004J$$

$$E_M = 0.05 \pm 0.02J$$

Los siguientes son los resultados de los cálculos:

Ciclos	Energía cinética (J)	Energía mecánica (J)
1/4	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.03
1 1/4	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.03
2 1/4	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.03
3 1/4	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.03
4 1/4	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.03
5 1/4	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.03
6 1/4	0.05 ± 0.02	0.05 ± 0.03
7 1/4	0.04 ± 0.02	0.04 ± 0.03

Tabla 3: Se muestra la energía cinética y la mecánica en base al número de oscilaciones que dió la pelota.



Gráfica 2: energía mecánica de acuerdo al número de ciclos.

En la gráfica, se puede ver que realmente no hubo un cambio considerable en la energía mecánica después de realizar los cálculos. Esto en parte se puede deber a los errores

en la experimentación. Sin embargo, a lo largo del trabajo, se tomaron medidas para reducir estos errores. Primero que nada, para mantener la exactitud de los datos, se probó la calibración del sensor y que las mediciones comenzaran en cero antes de comenzar las pruebas. De igual manera, para mejorar la precisión, se realizaron varias pruebas con distintos hilos, masas y distancias al momento de diseñar el péndulo para tener el mejor control posible y encontrar los elementos que producían oscilaciones casi constantes. Finalmente, para reducir el error aleatorio, se buscaron los sensores e instrumentos que tuvieran la escala más precisa.

Finalmente, fue importante realizar el cálculo de la energía total del sistema, la cual se puede obtener a partir de la energía potencial cuando la pelota se encuentra en la altura máxima del péndulo (con un ángulo de 90°).

Primero se calculó la altura:

$$h = (0.030 \pm 0.001m) + (0.540 \pm 0.001m)$$

$$h = 0.570 \pm 0.002m$$

$$E_T = mgh = (0.011 \pm 0.001kg)(9.81ms^{-2})(0.570 \pm 0.002m)$$

$$E_T = (9.81m^{-2})((0.00627) \pm (0.00627)(\frac{0.001}{0.011} + \frac{0.002}{0.570})) = 0.0615 \pm 0.0006J$$

Conclusiones

Después de realizar los cálculos y gráficas, se puede ver mientras el número de ciclos aumenta, la energía mecánica se reduce de acuerdo a la ecuación lineal $y = -0.0008x + 0.0519$. No obstante, en base a la experimentación, la energía mecánica realmente se mantuvo constante y solo fue reducida en las últimas mediciones de siete ciclos y un cuarto, teniendo un valor de $0.04 \pm 0.03\text{J}$, cuando la medición regular fue $0.05 \pm 0.03\text{J}$ en base a la experimentación. De igual manera, al comparar este valor con la energía total del sistema ($0.0615 \pm 0.0006\text{J}$), se puede ver que hubo una pérdida de energía, pues probablemente la energía fue transformada a calor o ruido cuando la masa oscilaba en el péndulo. Sin embargo, la pérdida de energía no es muy grande, por lo que sería útil usar un péndulo para un experimento en un laboratorio.

Por otro lado, se podría decir que la hipótesis fue parcialmente correcta, debido a que la energía mecánica sí fue reducida, pero en una magnitud muy pequeña. Sin embargo, esto se puede deber a la incertidumbre de los datos, ya que por ejemplo, en la gráfica 1, se puede apreciar un declive del impulso en relación a los ciclos, sin embargo por la propagación del error, la precisión de los datos era reducida. Inclusive, en la tabla 3 se puede observar que la energía cinética es igual que la mecánica, debido a que la energía potencial tenía un valor muy bajo e insignificante cuando se propagaba el error.

Por lo tanto es importante analizar los errores de la experimentación que afectaron los resultados. Primero que nada, como puede verse en la tabla 1, hubo un error sistemático ya que los valores de fuerza obtenidos para cada intento variaban mucho entre sí, lo cual afectó la precisión. Esto se puede deber al diseño del experimento, ya que por ejemplo, la posición inicial de la pelota se mantuvo controlada con el uso de una pinza en un segundo soporte universal, sin embargo, pudo haber variado la manera en que la masa era colocada antes de ser soltada. Además, a pesar de que se intentó controlar la trayectoria del péndulo lo más posible, en ocasiones la pelota impactaba con el sensor ligeramente más a la derecha o a la izquierda, creando variaciones que afectaron los resultados medidos por el sensor.

Por lo tanto, algunas propuestas para mejorar el experimento serían principalmente dibujar una marca sobre la pelota para que las pinzas se coloquen en la misma posición inicial del péndulo, y en lugar de utilizar el sensor de fuerza, se podría utilizar un sensor de

velocidad como el *PASCO Motion Sensor* para calcular la energía cinética con la fórmula 10. Finalmente, una propuesta para una futura investigación es realizar un experimento que determine la relación entre el ángulo desde el cual se soltó la masa del péndulo y la energía mecánica, para analizar si el ángulo de un péndulo amortiguado afecta la energía mecánica después de un ciclo de oscilación, como se ve en el siguiente diagrama:

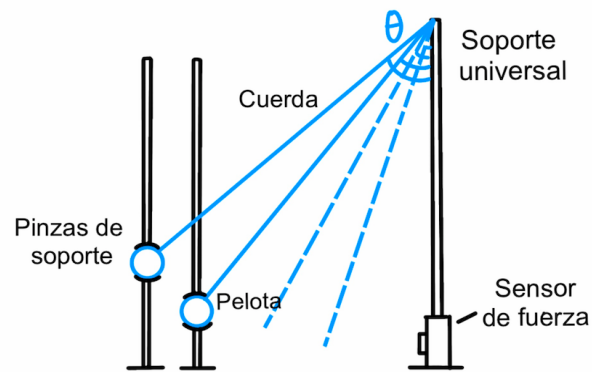


Diagrama 1: Diseño del experimento propuesto

Bibliografía

Castaños, E. (2016). *El movimiento armónico amortiguado*. Recuperado de:

<https://cienciadelux.com/2016/03/05/movimiento-armonico-amortiguado/>

Gómez, V. (2017). *Práctica 2: Péndulo Simple. Determinación de la aceleración de la gravedad*. Recuperado de:

<https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/30839/Practica%202%20-%20P%C3%A9ndulo%20Simple.pdf?sequence=1>

Gregory L. Baker, & James A. Blackburn. (2005). *The Pendulum : A Case Study in Physics*. OUP Oxford

Matthews, M. (2004). Idealisation and Galileo's Pendulum Discoveries: Historical, Philosophical and Pedagogical Considerations. *Science & Education*, 13(7/8), 689–715.

<https://0-doi-org.biblioteca-ils.tec.mx/10.1007/s11191-004-9513-x>

Pérez, H. (1997). *Física General*. (7.^a ed.) México: Publicaciones Cultural.

Pérez, R. (s.f). *El péndulo: un clásico que no pasa de moda*. Recuperado de:

http://www.cienciorama.unam.mx/a/pdf/484_cienciorama.pdf