Área de una elipse por medio de matrices

En matemáticas, una matriz es un arreglo bidimensional de números que suele ser usado para describir sistemas de ecuaciones lineales, diferenciales o para representar una aplicación lineal dada una base, de acuerdo a Gobierno de Canarias (2013). Pueden sumarse, multiplicarse y descomponerse de varias formas, lo que también las hace un concepto clave en el campo del álgebra lineal. La primera vez que conocí este concepto fue en el curso de informática, donde aprendimos a usar matrices para representar, organizar y manipular información a través del código. Más tarde, en un taller de matemáticas aprendí acerca de los vectores y muchas de las operaciones que se pueden realizar con ellos, lo cual me sorprendió bastante, ya que en física solo llegamos a aprender lo más básico. No obstante, en el taller no llegué a aprender acerca de las matrices, lo cual me llamaba la atención porque era como una nueva área de matemáticas que no conocía y que podía tener usos en otras áreas como física e informática, por lo que en esta exploración, aproveché la oportunidad para indagar de este tema.

Investigando un poco, encontré que existe una manera de escribir una ecuación cónica como una matriz, tema que inmediatamente me llamó la atención, ya que en robótica aprendí del diseño CAD (*Computer Assisted Design),* y en ocasiones utilizo algunas de las secciones cónicas (circunferencias y elipses) para diseñar piezas del robot. Sin embargo, a veces es importante conocer el área superficial de la pieza para preparar los materiales y estimar su costo, por lo que me llegué a preguntar si se podría calcular el área de una elipse a través de matrices, ya que por ejemplo, si se hiciera un programa que calculara esta área, le resultaría más fácil interpretar datos escritos como una matriz que como una ecuación cónica con diversos caracteres. De esta manera, mi objetivo en esta exploración se basa precisamente en enontrar un método para calcular el área de una elipse por medio del álgebra lineal, através de lo cual podré aprender algunos conceptos, propiedades y operaciones de las matrices. Sin embargo, antes de explorar las matrices, fue importante comprender primero las cónicas.

Secciones cónicas

De acuerdo a Arandia y Garcés (2019), las curvas de las secciones cónicas son el resultado de las intersecciones entre un cono circular recto y un plano. Dependiendo del ángulo con el cual el plano intersecta el cono, se forman las distintas secciones que son categorizadas como degeneradas o no degeneradas.

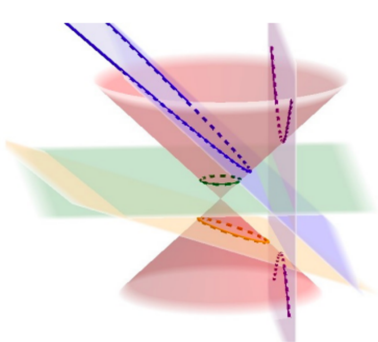

Figura 1: Cónicas no degeneradas. Imagen de Arandia y Garcés (2019)

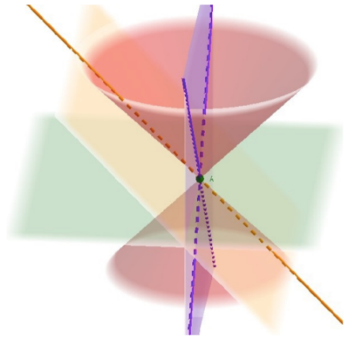

Figura 2: Cónicas degeneradas. Imagen de Arandia y Garcés (2019)

Las no degeneradas son: cirfunferencia, elipse, parábola e hipérbola, mientras que las degeneradas, es decir aquellas en las que el plano pasa por el vértice son el punto, la recta y las rectas secantes.

Todas las cónicas pueden definirse con la siguiente ecuación general:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Elipses

Una elipse, de acuerdo a Arandia y Garcés (2019), es un set de todos los puntos generados cuando un plano no paralelo a la base del cono intersecta todas las generatrices del cono.

En una elipse, la suma de las distancias de cualquier punto en la elipse a dos puntos fijos llamados focos es una constante.

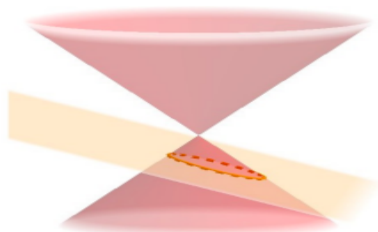

Figura 3: Elipse. Imagen de Arandia y Garcés (2019)

Tomando esto en consideración, una elipse puede definirse con la siguiente ecuación estándar:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

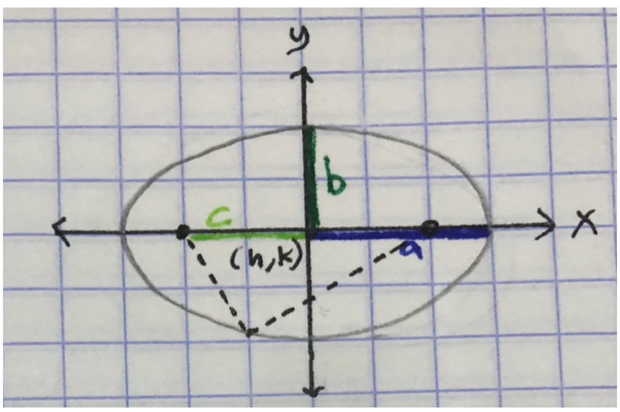

Figura 4: Elipse en el plano cartesiano

Sin embargo, la ecuación estándar puede reescribirse para aproximarse a la ecuación general de la siguiente manera:

$$\frac{b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (3)$$

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4)$$

En este caso, haría falta el término Cxy. Esto se debe a que este término se refiere a una rotación de la elipse, lo cual no es considerado en la ecuación estándar.

Área de una elipse con cálculo

Teniendo la ecuación de la elipse, una manera de obtener su área es por medio de integrales, lo cual consideré importante antes de comenzar con las matrices para entender en que se basa el cálculo del área. Usando este método, se podría obtener el área de la mitad superior de la elipse y luego multiplicarla por dos. Sin embargo, es necesario que el centro de la cónica se encuentre en el origen (0,0) para simplificar el procedimiento. Por lo tanto, para las siguientes operaciones, no se tomará ningún valor para h o k, ya que de igual manera una traslación horizontal o vertical no afectaría el área de la elipse.

Primero es necesario despejar y:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$	$y = \pm\sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$ $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Por ejemplo, utilizando un valor de $a = 2$ y $b = 1$, la a ecuación $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ se despejaría a $y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, lo cual gráficamente se vería de la siguiente manera:

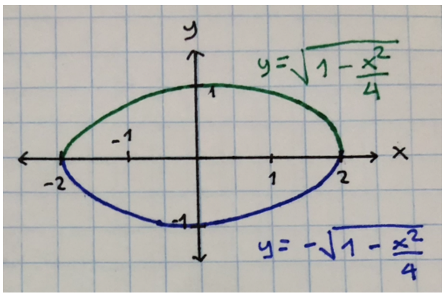

Figura 5: elipse formada por dos ecuaciones.

Por lo tanto, una manera de obtener el área, es calculando la integral de $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ desde el origen hasta a, lo cual daría $\frac{1}{4}$ del área.

$$\frac{1}{4}\text{A} = \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx$$

$$\text{A} = 4\text{b}\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx$$

En este punto, fue necesario utilizar sustitución trigonométrica para resolver la integral:

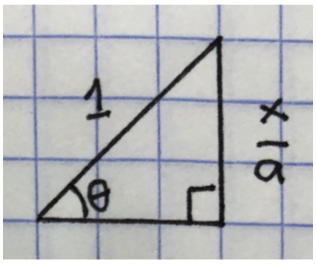

Figura 6: Sustitución trigonométrica

$$sen\ \theta = \frac{x}{a}$$
$$x = a\ sen\ \theta$$
$$\theta = arcsen\ \frac{x}{a}$$
$$dx = a\ cos\ \theta\ d\theta$$

Sin embargo, también se debe de cambiar el valor de los límites de la integral:

Para a: $\theta = arcsen\ \frac{a}{a}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$	Para 0: $\theta = arcsen\ \frac{0}{a}$ $\theta = 0$

Lo cual resultaría en la siguiente ecuación:

$$\text{A} = 4\text{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sen^2\theta}\ \ a\ cos\ \theta\ d\theta$$

Por lo tanto, el resultado sería el siguiente:

$\text{A} = 4\text{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2\theta}\ \ cos\ \theta\ d\theta$ $\text{A} = 4\text{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta\ \ d\theta$ $\text{A} = 4\text{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\ 2\theta\ +1}{2}\ d\theta$ $\text{A} = 4\text{ab}\ (\frac{sen\ 2\theta}{4}+\frac{\theta}{2})]_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\text{A} = 4\text{ab}(\frac{sen\ \pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{sen\ 0}{4}+\frac{0}{4})$ $\text{A} = 4\text{ab}(-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4})$ $\text{A} = \text{ab}\pi$

De esta manera, me dí cuenta de que en realidad este procedimiento sirve como una demostración de la fórmula del área de una elipse:

$$A = ab\pi \tag{5}$$

Álgebra Lineal

Sin embargo, mi interés se centraba en encontrar una manera de obtener el área de una elipse por medio de matrices. Por este motivo, al investigar acerca de las secciones cónicas y matrices, descubrí varios conceptos de álgebra lineal.

Transformaciones lineales

Unas de las primeras cosas que investigué fueron las transformaciones lineales, las cuales son "un conjunto de operaciones que se realizan sobre un elemento de espacio vectorial V para convertirlo en un elemento de otro espacio vectorial W." (Jiménez, 2016, p.1). Sin embargo, se deben cumplir dos propiedades para considerarse como transformaciones **lineales**.

- Deben tener un punto de origen fijo
- Las líneas deben mantenerse rectas y paralelas (no deben curvarse)
- Permanecen equidistantes

Esto resultó muy relevante debido a que me dí cuenta de que una elipse puede definirse como el resultado de una transformación lineal de una circunferencia de radio 1, donde esta es estirada o rotada pero no trasladada.

Una manera de representar estas transformaciones es a través de matrices que describen las modificaciones realizadas al espacio vectorial. Para esto, es necesario conocer los vectores base $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ para identificar su posición final después de la transformación. Estos vectores son los que formarán las columnas de la matriz con la cual se puede encontrar la posición de cualquier otro vector que forma parte de la transformación.

Por ejemplo:

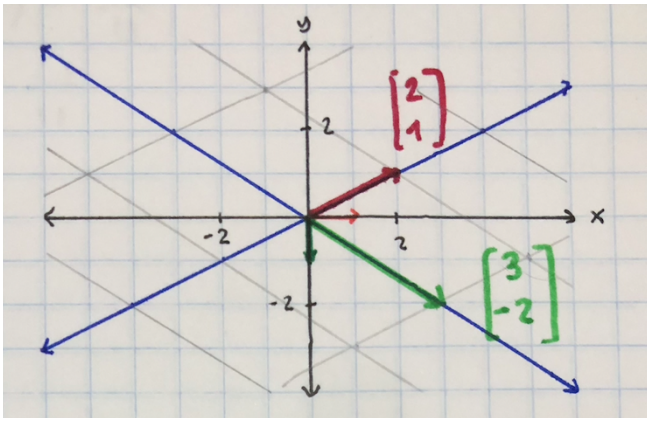

Figura 7: Transformaciones lineales

En este caso, el vector î, terminó en la posición $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ y el vector ĵ se convirtió en el vector $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ Por lo tanto, la matriz de transformación sería la siguiente

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}$$

Conociendo este concepto, me dí cuenta de que una elipse puede verse como una transformación lineal si se manteine en el origen, pues sería el resultado de un estiramiento horizontal y/o vertical de un círculo de radio 1.

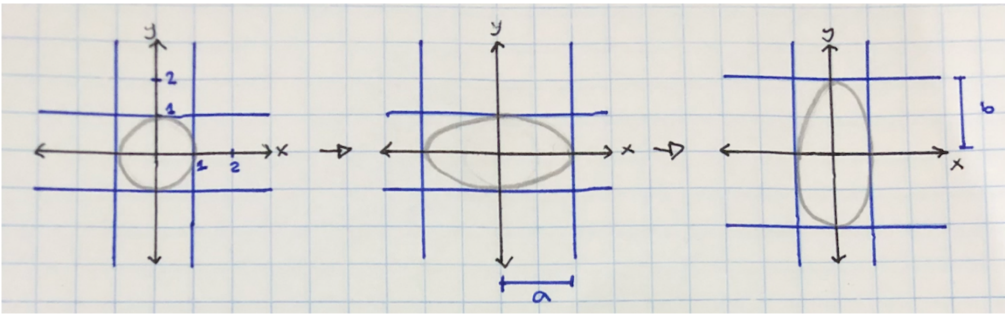

Figura 8: estiramiento de una circunferencia

En este caso, la matriz asociada a la transformación se definiría de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix}$$

Sin embargo, para formar la matriz en términos de la ecuación general de la elipse $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, era necesario despejar los valores de a y b. Por ejemplo, como fue visto en la ecuación 3, el término $Ax^2 = b^2x^2$, por lo que $b = \sqrt{A}$. Sin embargo, como fue mencionado anteriormente, una traslación rompería las condiciones de una transformación lineal, por lo que se deben omitir los términos que involucran una traslación desde el origen, lo cual suele ser descrito con los valores de h y k ($-2b^2hx,\ -2a^2ky,\ b^2h^2 + a^2k^2$), lo cual resultaría en la ecuación $Ax^2 + By^2 + F = 0$ y de esta manera el centro de la elipse se encontraría en (0,0).

Por lo tanto, la matriz asociada a la transformación lineal de una ecuación $Ax^2 + By^2 + F = 0$ sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{B} & 0 \\ 0 & \sqrt{A} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Determinante

Después de entender un método para describir elipses como matrices, seguí investigando maneras en las que podría encontrar su área, por lo que buscando propiedades o características de matrices, llegué a aprender del determinante. Este "es el producto de sus *n* valores propios, pero también puede ser definida por la fórmula de Leibniz" (Gobierno de canarias, 2013, p. 8) En una matriz 2x2, este se definiría de la siguiente manera:

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \times a_{22}) - (a_{21} \times a_{12}) \quad (7)$$

Y calculando el determinante de una matriz de elispe se obtendría lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{B} & 0 \\ 0 & \sqrt{A} \end{vmatrix} = \sqrt{A} \times \sqrt{B} - 0 = \sqrt{A} \times \sqrt{B} = ab$$

Lo cual se asemejaba a la fórmula 5 del área de una elipse, sin embargo hacía falta multiplicar por π. Por lo tanto, decidí investigar ¿qué significado tiene el determinante?

Al realizar transformaciones lineales en un plano, una figura es deformada en una misma proporción, por lo tanto, el determinante es el factor que describe el cambio del área luego de ser transformado. Es un factor que indica la compresión o estiramiento del espacio (área).

De igual manera, el valor del determinante puede tener distintos significados para el área de una figura transformada:

$0 < det(M) < 1$	área reducida
$det(M) > 1$	área incrementada
$det(M) < 0$	cambio de orientación pero no necesariamente cambió el área
$det(M) = 1$	área igual
$det(M) = 0$	la transformación comprime el espacio a una dimensión menor

Por lo tanto, al tener el área de una figura en un plano no deformado, es posible obtener el área nueva después de la transformación al multiplicar la original por el determinante, lo cual explicaría porqué el determinante era ab, ya que el área de una circunferencia de radio 1 sería π y al aplicar la transformación, el área se estira o comprime en un factor ab, por lo que su área sería abπ. De esta manera, se puede establecer que el área de una elipse en base a su matriz de transformación sería:

$$A = \begin{vmatrix} \sqrt{B} & 0 \\ 0 & \sqrt{A} \end{vmatrix} \pi \qquad (8)$$

Rotaciones

Este procedimiento resulta simple, debido a que únicamente se necesita saber el valor del estiramiento o compresión vertical u horizontal, dados por el valor A y B de la ecuación general de una elipse. Sin embargo, una transformación lineal también puede ser una rotación, la cual se indica con valor *C* de la ecuación general de las cónicas.

Por ejemplo, la siguiente ecuación indica que la elipse se encuentra rotada.

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 12 = 0$$

Por lo que para hayar su área, se tendría que averiguar la matriz asociada a la transformación. Para esto, se necesitan encontrar las nuevas posiciones de los vectores î y ĵ, por lo que primero decidí graficar la ecuación en la calculadora TI-nSpire CX II. Sin embargo, era neceario encontrar los vértices, por lo que decidí usar la función de encontrar los ejes de simetría de la gráfica para después encontrar los puntos de intersección:

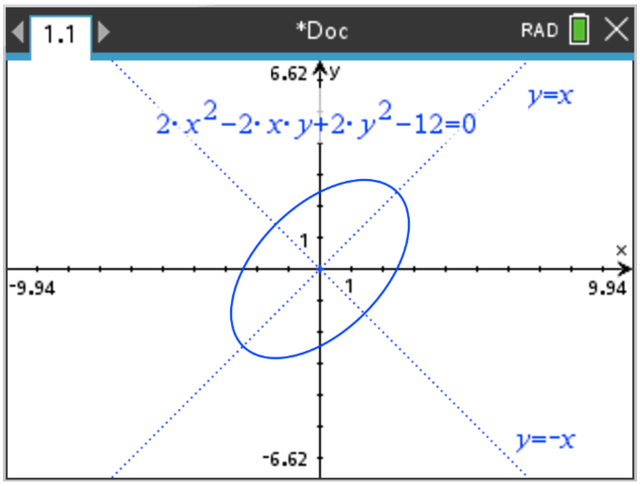

Figura 9: gráfica de elipse

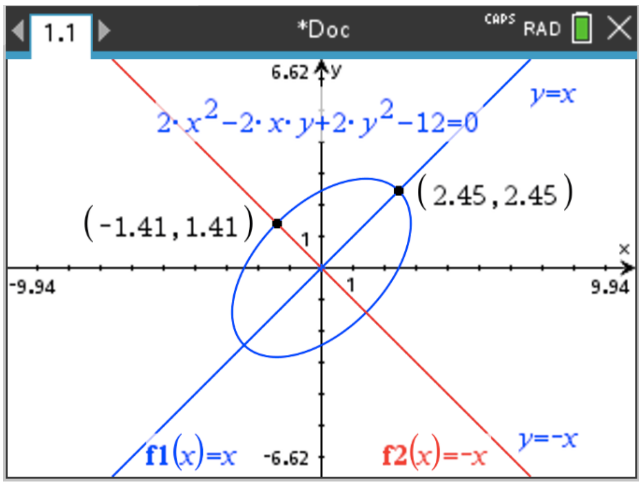

Figura 10: vertices y covértices

Por lo tanto, pude identificar que la matriz asociada a la transformación se vería de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 2.45 & -1.41 \\ 2.45 & 1.41 \end{bmatrix} \textit{(Valores redondeados)}$$

Por lo que el área nuevamente se obtendría a través del determinante.

$$\begin{vmatrix} 2.45 & -1.41 \\ 2.45 & 1.41 \end{vmatrix}$$

Área = $((2.45) \times (1.41) - (-1.41) \times (2.45))\pi = 21.8$

Sin embargo, este procedimiento solo fue posible con una calculadora gráfica, por lo que me llegué a cuestionar si habría alguna otra manera de obtener los vértices y co-vértices de la elipse rotada.

Cambio de base

Después de investigar, encontré que una manera de resolverlo era buscando la ecuación cónica respecto al nuevo eje sobre el cual fue rotada. Para esto, era necesario entender el concepto de cambio de base, el cual permitiría "cambiar las coordenadas de un vector en una base por las coordenadas del mismo vector en otra base." (Pustilnik y Gómez, 2017). Por ejemplo, en la figura 11, el vector rojo en la base canónica, es decir la base regular donde el vector î = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector ĵ = $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, sería $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, pero al reescribirlo en la nueva base de los ejes x′ e y′, este vector tendría el valor de $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por ende, se podría encontrar la ecuación de la elipse sobre la base en la que se encuentra (sin un valor Cxy) en lugar de la ecuación de la base canónica, como se muestra en la figura 12:

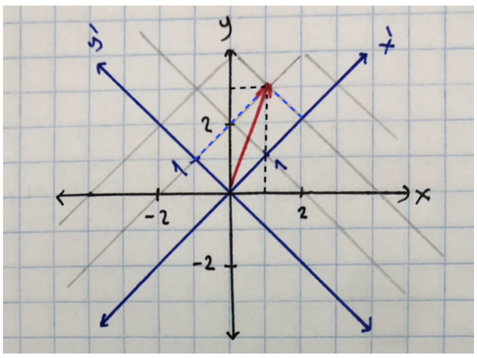

Figura 11: cambio de base

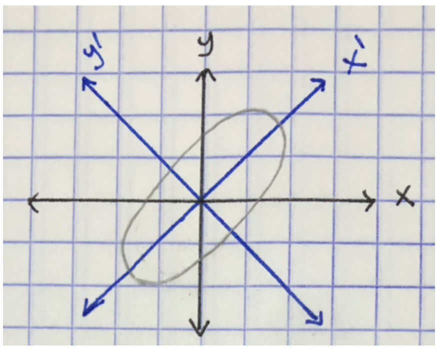

Figura 12: cambio de base para elipse rotada

Por lo tanto, para realizar un cambio de base, primero se debe reescribir la cónica $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ en la siguiente ecuación matricial:

$$[x\ y]\ M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 \qquad (9)$$

En esta ecuación, M se refiere a los términos de la transformación lineal, mientras que L se refiere a los términos lineales de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{bmatrix}$$

$L = [D\ E]$ términos lineales

Por ejemplo, volviendo a la ecuación $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 12 = 0$, esta se escribiría de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2/2 \\ -2/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = [0\ \ 0] \qquad F = -12$$

$$[x\ y] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 12 = 0$$

Por otro lado, la ecuación que representa una cónica rotada después del cambio de base en los ejes x' e y' se vería de la siguiente manera:

$$[x'y']\ D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + L\, P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + F = 0 \qquad (10)$$

Donde:

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ compuesta por los valores propios (λ)

$P = [\overrightarrow{V_1}\ \ \overrightarrow{V_2}]$ matriz que diagonaliza a M (columnas compuestas por vectores propios de forma normalizada)

Separando la ecuación por partes, para obtener la matriz D, fue necesario entender los valores propios: "Sea A una matriz de tamaño n × n . Un escalar λ es llamado un valor propio de A si existe un vector x distinto de cero tal que A x = λ x ." (Universidad Nacional de Colombia, 2014).

Una manera de obtener estos valores fue a través del polinomio característico:

$$p(\lambda) = det(M - \lambda I) = 0 \qquad (11)$$

En este método, I es una matriz identidad donde "todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás elementos son iguales a 0." (Gobierno de Canarias, 2013, p.8). Por lo tanto, volviendo al ejemplo, obtuve los valores propios con el siguiente procedimiento:

Reemplazando la matriz M e I: $$\left\|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = 0$$ Multiplicando un escalar por la matriz identidad: $$\left\|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right\| = 0$$ Realizando la resta: $$\left\|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right\| = 0$$	Calculando el determinante: $$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$ Resolviendo la ecuación: $$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$ $$\lambda = 1{,}3$$

Una vez obtenidos los valores propios, la matriz D sería: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

El siguiente paso fue encontrar la matriz L, formada por los vectores propios asociados a los valores propios, para lo cual se puede usar la siguiente fórmula:

$$(M - \lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Para el primer valor $\lambda_1 = 1$, el procedimiento sería el siguiente:

Reemplazando valores: $$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$ Multiplicando I por λ_1 y restando: $$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$ Realizando la multiplicación de la matriz resultante por el vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$: $$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ $$x - y = 0$$ $$x = y$$	Por lo tanto, para encontrar el vector asociado al valor propio, se reemplaza el valor de x por y, debido al paso anterior: $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$$ $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Consecuentemente, el vector propio asociado a λ_1 sería: $$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Repitiendo el mismo procedimiento, el segundo vector propio sería el siguiente:

$(M-3I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $x=-y$	$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\y\end{bmatrix}$ $\overrightarrow{V_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Incluso, a través de ambos vectores se puede ver porqué en la figura 10, los ejes de simetría en este caso fueron $y=x$ y $y=-x$, pues se puede ver la rotación de $\frac{\pi}{4}$ rad en la siguiente figura:

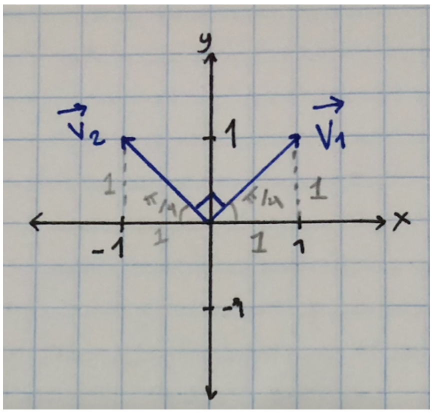

Figura 13: Demostración de la rotación

Sin embargo, la matriz P, esta está formada por los vecores propios normalizados, "Normalizar un vector significa transformarlo en un vector con la misma dirección y el mismo sentido pero de módulo igual a 1. Es decir, el proceso de normalización de un vector implica cambiar su longitud manteniendo su dirección y su sentido." (Geometría Analítica), lo cual se logra dividiendo los valores de la matriz entre los módulos de los vectores, por lo que la matriz P sería la siguiente:

Matriz sin diagonalizar:	Diagonalizada:
$P_0=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ Módulo de $\overrightarrow{V_1}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ Módulo de $\overrightarrow{V_2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$	$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Inclusive, el determinante de esta matriz es 1, ya que el área no cambia con el cambio de base. Por lo tanto, sustituyendo los valores de D y F, L y P, la ecuación matricial sería la siguiente:

$$(x'y')\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(0\ \ 0)\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}-12=0$$

$$(x'y')\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ \overline{y'}\end{pmatrix} - 12 = 0$$

En esa ecuación, el término $\frac{C}{2}$ es 0, lo cual tiene sentido, ya que ahora está escrita sobre la nueva base sobre la cual fue rotada. Por lo tanto, para obtener la ecuación general, realicé la multiplicación de vectores, lo cual resulta en lo siguiente:

$$x^2 + 3y^2 - 12 = 0$$

Sin embargo, me dí cuenta de que esta ecuación sin términos lineales no cumple con la condición de que $F = a^2b^2$. Por lo tanto, sería necesario convertirla primero a la ecuación estándar:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Y ahora si se podría regresar a la ecuación general: $4x^2 + 12y^2 - 48 = 0$ donde se puede ver que en realidad cada coeficiente se multiplicó por 4.

Finalmente, utilizando la ecuación 8, el área de esta elipse sería $A = \sqrt{4} \times \sqrt{12} \times \pi = 21.8$, lo cual coincide con el resultado obtenido previamente.

Conclusiones

El área de una elipse puede ser relavante para temas de arquitectura, construcción o incluso en industrias de diseño de piezas, donde se utilicen superficies con forma ovalada, ya que en ocasiones, considerar el área es importante para definir costos o eficientizar el uso de recursos. Por lo tanto, resulta importante conocer los distintos métodos con los que se puede obtener el área de la elipse, pues por ejemplo, puede que en sistemas informáticos, estas se representen por medio de matrices ya que en computación, estas permiten una manipulación efectiva de información, por lo que se podría preferir manejar los datos en este formato. Sin embargo, como fue visto después del procedimiento del cálculo, el área de una elipse se puede obtener directamente a través de la fórmula 5, por lo que una limitación del método explorado, es que realmente no es necesario escribir la matriz asociada a la transformación y calcular el determinante si ya se tienen los valores de los vértices y covértices. Sin embargo, este método ayuda a entender una elipse como un estiramiento o compresión de una circunferencia de radio

1, aunque en realidad, comprendiendo el determinante, se podría tener una elipse o cirfunferencia con vertices diferentes de 1, y al ser deformada, con este método se podría encontrar el factor con el que cambió el área.

Por otro lado, considero que el método explorado me permitió entender algunos conceptos básicos del álgebra lineal, específicamente de las transformaciones, tipos de bases, valores y vectores propios, entre otros. De igual manera, puedo decir que el objetivo de la exploración fue cumplido, ya que encontré una manera de calcular el área de una elipse por medio de matrices al utilizar el concepto del determinante, e incluso aprendí del cambio de bases para cónicas rotadas, ya que los vectores asociados a la transformación del plano rotado podrían ser complicados de obtener, por lo que se puede utilizar la ecuación matricial de la elipse para cambiar de la base canónica a su base de rotación y así encontrar los valores de a y b respectivos. Finalmente, me gustaría seguir explorando este tema, ya que me interesa buscar métodos más sencillos para obtener los vértices de una elipse rotada, e inclusive podría buscar una manera de calcular el área de la elipse rotada sin necesidad de encontrar su ecuación en la base de transformación.

Bibliografía:

Arandia, W y Garcés, J. (2019). *UN ESTUDIO DE LAS SECCIONES CÓNICAS Y CUÁDRICAS A PARTIR DE SU MATRIZ ASOCIADA.* Recuperado de: http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/10525/TE-23362.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Euclides. (s.f). *Cónicas*. Recuperado de: http://euclides.us.es/da/apuntes/fisica/geom5.pdf

Jiménez, A. (2016). *Trasnformaciones Lineales.* Recuerado de: http://samhain.softgot.com/algebralineal/notasclase/transformaciones_lineales.pdf

Geometría Analítica. (s.f). *Cómo normalizar un vector.* Recuperado de: https://www.geometriaanalitica.info/como-normalizar-un-vector-normalizacion-vectorial/#:~:text=Normalizar%20un%20vector%20significa%20transformarlo,su%20direcci%C3%B3n%20y%20su%20sentido

Pustilnik, I y Gómez, F. (2017). *Matriz de cambio de base.* Recuperado de: https://aga.frba.utn.edu.ar/matriz-de-cambio-de-base/

S.A. (2013). *Matriz.* Recuperado de: https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/egonjor/files/2013/04/matrices.pdf

S.A. (2014). *Algebra de matrices.* Recuperado de: https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/08/11d.-ALGEBRA-DE-MATRICES-4.pdf

Syphers, M and Harms, E. (2018). *Fundamentals of Accelerator Physics and Technology: Area of ellipses*. Recuperado de: https://uspas.fnal.gov/materials/18ODU/Fund/some-notes-on-ellipses.html

Universidad nacional de Colomia. (2014). *Valores y vectores propios.* Recuperado de: https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/clases/8-clases/121-clase-21-parte1.html

Algebra para todos (2020). *Aprende a identificar cónicas rotadas* . Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=WgY7Aktr4XY

Algebra para todos (2019). *¿ Que es el DETERMINANTE de una MATRIZ?.* Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=dHP2uRBE8bM

3Blue1Brown. (2016). *Transformaciones lineales y matrices.*Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=YJfS4_m_0Z8